Naturaleza ondulatoria de los campos ***E*** y ***H***.

E(***r***, *t*) y **H**(***r***, *t*) existen en un medio normal con parámetros ε, μ, σ y el medio es libre de fuentes, ($\rho_f = 0$, ***J*** = **0**).
Entonces

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\rightarrow\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mu\mathbf{H})=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H}) \qquad 48$$

Ahora

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\;;\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E},\,\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}\rightarrow-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{H})=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad 49$$

$$\rightarrow\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E}+\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=-\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad 50$$

Pero,

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2(\mathbf{E}) \qquad 51$$

En la ecuación (51)

$\nabla\cdot\mathbf{E}=0,$ ya que $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f=0$ (sin fuentes) y

$\nabla\cdot\mathbf{D}=0=\nabla\cdot\epsilon\mathbf{E}=\epsilon\nabla\cdot\mathbf{E}$

Por consiguiente,

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad 52$$

Caso 1. Para σ = 0, o sea, un medio sin pérdidas, la ecuación (52) se convierte en

$$\nabla^2\mathbf{E}=\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad 53$$

Se ve que el campo **E** es una onda que se propaga con velocidad $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ = ctte.
Si se trata del vacío,

$$\mu=\mu_0,\,\epsilon=\epsilon_0\rightarrow v_0=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\times4\pi\times10^{-7}}}=3\times10^8$$ $\mathrm{ms}^{-1} = c$, la velocidad de la luz.

Caso 2. Para $\sigma\neq0$, o sea, un medio con pérdidas, la ecuación (52) describe una onda que se propaga con velocidad $v<\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ y al desplazarse sufre atenuación debido a las pérdidas de energía en el medio.
De igual manera se puede demostrar que el campo **H** satisface

$$\nabla^2\mathbf{H}=\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad 54$$

Los campos **E** y **H** en un sistema ortogonal generalizado.

Para los campos **E** o **H** se puede expresar las ecuaciones (52) y (54) en términos de un campo $\overline{\mathrm{F}}$, así,

$$\nabla^2\mathbf{F}=\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} \qquad 55$$

En la ecuación (55) el campo vectorial **F**(***r***, *t*) representa **E**(***r***, *t*) o **H**(***r***, *t*), y su dependencia en el tiempo es armónica. Entonces, se tiene

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \qquad 56$$

Se sustituye la ecuación (56) en la ecuación (55) logrando,

$$\nabla^2\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right]=\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right]+\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}\left\{\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\right] \qquad 57$$

Intercambiando operadores, se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\{\left[\nabla^2\left(\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\right)\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\left[-\omega^2\mu\epsilon\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})=j\omega\mu\sigma\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\\
&\rightarrow\mathrm{Re}\left\{\left[\nabla^2\left(\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\right)+\left(\omega^2\mu\epsilon-j\omega\mu\sigma\right)\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}=\mathbf{0}\\
&\rightarrow\nabla^2\left(\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\right)=\left(-\omega^2\mu\epsilon+j\omega\mu\sigma\right)\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\\
&\rightarrow\nabla^2\left(\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})\right)=-\omega^2\mu\epsilon\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})=-\omega^2\mu\hat{\epsilon}\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \qquad 58$$

Aquí,

$$\hat{\epsilon}=\epsilon\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)$$ es la permitividad “compleja”.

De este modo, se tiene la ecuación de onda en forma compleja o la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})=-\omega^2\mu\hat{\epsilon}\hat{\overline{F}}(\boldsymbol{r})$$

Comentarios:
(1) Se puede llegar a la ecuación de Helmholtz a través de las ecuaciones de Maxwell en forma compleja.

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\nabla\times\hat{\overline{E}}=\nabla\times\left(-j\omega\mu\hat{\overline{H}}\right)=-j\omega\mu\left(\nabla\times\hat{\overline{H}}\right)=-j\omega\mu\left(\sigma\hat{\overline{E}}+j\omega\epsilon\hat{\overline{E}}\right)\\
&=-j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)\hat{\overline{E}}=\omega^2\mu\epsilon\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)\hat{\overline{E}}=\omega^2\mu\hat{\epsilon}\hat{\overline{E}}\\
&\rightarrow\nabla\times\nabla\times\hat{\overline{E}}=\nabla\left(\nabla\cdot\hat{\overline{E}}\right)-\nabla^2\hat{\overline{E}}=-\nabla^2\hat{\overline{E}}\rightarrow\nabla^2\hat{\overline{E}}=-\omega^2\mu\hat{\epsilon}\hat{\overline{E}}
\end{aligned}$$

Se debe verificar con el campo $\hat{\overline{H}}$.
(2) Permitividad compleja $\hat{\epsilon}$.
Se tiene

$$\hat{\epsilon}=\epsilon\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)$$

A ver:
Para un medio sin pérdidas las ecuaciones de Maxwell en forma compleja son:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\hat{\overline{E}}=-j\omega\mu\hat{\overline{H}}\\
&\nabla\times\hat{\overline{H}}=j\omega\epsilon\hat{\overline{E}}\\
&\nabla\cdot\hat{\overline{D}}=\hat{\rho}_f\\
&\nabla\cdot\hat{\overline{B}}=0
\end{aligned}\right.\quad\text{Sistema I}$$

Para un medio con pérdidas,

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\hat{\overline{E}}=-j\omega\mu\hat{\overline{H}}\\
&\nabla\times\hat{\overline{H}}=\sigma\hat{\overline{E}}+j\omega\epsilon\hat{\overline{E}}\\
&\nabla\cdot\hat{\overline{D}}=\hat{\rho}_f\\
&\nabla\cdot\hat{\overline{B}}=0
\end{aligned}\right.\quad\text{Sistema II}$$

El sistema (I) se puede hacer semejante al sistema (II) haciendo que

$$\nabla\times\hat{\overline{H}}=(\sigma+J\omega\epsilon)\hat{\overline{E}}=j\omega\hat{\epsilon}\hat{\overline{E}}$$

lo cual implica que

$$\hat{\epsilon}=\epsilon\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)$$

Si ε es real, no hay pérdidas. Si ε es complejo, sí hay pérdidas.
Además de la disipación de energía debido a cierta conductividad, también en muchos dieléctricos se observan que bajo la aplicación de un campo armónico **E**, hay pérdidas de energía dentro del material y efectos de resonancia propios del proceso de polarización. El efecto se observa haciendo que la permitividad sea compleja, o sea,

$$\hat{\epsilon}=\epsilon'_0-j\epsilon''_0 \qquad 60$$

Las pérdidas en el dieléctrico pueden ocasionarse por fuerzas de amortiguación (proceso de polarización) que resulta en $\hat{\epsilon}=\epsilon'_0-j\epsilon''_0$ o por la existencia de una conductividad finita σ, lo cual implica

$$\hat{\epsilon}=\epsilon\left(1-\frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right) \qquad 61$$

o ambos.

$$\rightarrow\hat{\epsilon}=\epsilon'-j\epsilon'' \qquad 62$$

con

$$\left.\begin{array}{l}\epsilon'=\epsilon=\epsilon''_0\\ \epsilon''=\epsilon''_0+\sigma/\omega\end{array}\right. \text{ para dieléctricos con pérdidas} \qquad 63$$

Aclaratoria:
Al aplicar campos que varían con el tiempo a materiales, los vectores de polarización ***P*** y ***M*** varían con el tiempo a la misma frecuencia que los campos aplicados. A causa de las fuerzas de amortiguación que siempre están presentes, los vectores ***P*** y ***M*** estarán desfasados con respecto a los campos ***E*** y ***H***. Esto significa que, en forma general, ε y μ deben ser complejos. Esta naturaleza compleja de ε y μ es una manifestación de pérdida de potencia que ocurre en el material ya que es necesario realizar trabajo para vencer estas fuerzas friccionales de amortiguación.
Por ejemplo, sea $\hat{E}$ el fasor complejo que representa el campo eléctrico que actúa para polarizar el material dieléctrico. La polarización por unidad de volumen es

$$\boldsymbol{P}=\epsilon_0\alpha\,\mathrm{e}^{-j\varphi}\boldsymbol{E}$$

α es una constante positivo real y φ es el ángulo de fase por lo cual ***P*** está desfasado con respecto a ***E***. Pero se sabe que ***P*** = $\varepsilon_0\chi_e$***E*** para campos moderados.

$$\rightarrow \chi_e = \alpha\, \mathrm{e}^{-j\varphi}$$

La permitividad dieléctrica ε está dada por

$$\begin{aligned}
&\epsilon = \epsilon_0 (1+\chi_e) = \epsilon_0 (1+\alpha\, \mathrm{e}^{-j\varphi}) = \epsilon_0 (1+\alpha \cos\varphi - j\,\alpha \operatorname{sen}\varphi) \\
&= \epsilon_0 + \epsilon_0 \alpha \cos\varphi - j\,\epsilon_0 \alpha \operatorname{sen}\varphi \\
&= \epsilon' - j\epsilon''
\end{aligned}$$

Si en la ley de Ampere se deja que $\epsilon \rightarrow \hat{\epsilon}$, y $\hat{\bar{J}}$ sea la corriente de conducción, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \hat{\bar{H}} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \hat{\bar{E}}) + \hat{\bar{J}} \\
&\rightarrow \nabla \times \hat{\bar{H}} = j\,\omega \hat{\epsilon}\, \hat{\bar{E}} + \sigma \hat{\bar{E}} = j\,\omega \epsilon' \hat{\bar{E}} + \omega \epsilon'' \hat{\bar{E}} + \sigma \hat{\bar{E}} = j\,\omega \epsilon' \hat{\bar{E}} + (\omega \epsilon'' + \sigma) \hat{\bar{E}}
\end{aligned}$$

Esto implica que la parte imaginaria de $\hat{\epsilon}$ corresponde a un aumento de la conductividad del medio. A altas frecuencias y para un buen dieléctrico, σ es muy pequeño y la mayoría de la pérdida de energía se debe a las fuerzas de amortiguación de polarización que implica el término ε″. Para conveniencia cuando se trata de materiales dieléctricos que tengan una conductividad finita, se introduce una permitividad compleja única $\hat{\epsilon}$, donde

$$\hat{\epsilon} = \epsilon' - j\epsilon'' - \frac{j\,\sigma}{\omega} = \epsilon' - j\left(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

Así se incluyen tanto las pérdidas de amortiguación como la s pérdidas de conducción en un término único.

Permmeabilidad compleja.
Para materiales ferromagnéticos se observa algo similar a lo que sucede con la polarización. Existe una pérdida de energía propia al proceso de la magnetización en conjunto con la de conducción y polarización. Se toma en cuenta estas pérdidas al considerar la permitividad como compleja, así,

$$\hat{\mu} = \mu' - j\,\mu''$$

64

como se hizo con $\hat{\epsilon}$.
Sin embargo, en este curso se verán materiales con μ siempre real.

Resolución de la ecuación de Helmholtz.

Se utilizará un sistema de coordenadas ortogonales axial generalizado (u_1, u_2, z) en el cual el eje z es la dirección de propagación. Además, las superficies u_1, u_2 se tomarán como

independientes de z (como rectangular y cilíndrico). De este modo se podrá estudiar ondas planas, líneas de transmisión, guía de ondas y fibra óptica utilizando este método poderoso.
Se empieza con la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \hat{\bar{F}}(\boldsymbol{r}) = -\omega^2 \mu \hat{\epsilon} \hat{\bar{F}}(\boldsymbol{r})$$

Se asume soluciones del tipo

$$\hat{\bar{F}}(\boldsymbol{r}) = \hat{\bar{F}}(u_1, u_2, z) = \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)\hat{g}(z) \qquad 65$$

Se espera encontrar soluciones que son productos entre un escalar complejo $\hat{g}(z)$ y un vector complejo $\hat{\bar{f}}(u_1, u_2)$ (funciones) y luego combinar estas soluciones de manera que las condiciones de borde se satisfagan. Una vez satisfechas, la solución es única.
Se puede demostrar que una solución, en estado estacionario, de las ecuaciones de Maxwell, en una región del espacio libre es única si:
(i) Se conoce el campo eléctrico tangencial $\boldsymbol{E}_{\tan}$ en la superficie S que encierra el volumen o,
(ii) Se conoce el campo magnético tangencial $\boldsymbol{H}_{\tan}$ en la superficie S que encierra el volumen, o,
(iii) Si se conoce $\boldsymbol{E}_{\tan}$ en parte de la superficie S y $\boldsymbol{H}_{\tan}$ en el resto de la superficie S que encierra el volumen.

Determinación de $\hat{g}(z)$.

$$\nabla^2 \hat{\bar{F}} = \frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(\hat{\bar{F}})\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(\hat{\bar{F}})\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial z}(\hat{\bar{F}})\right)\right\} \qquad 66$$

$$\hat{\bar{F}}(u_1, u_2, z) = \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)\hat{g}(z)$$

$$\rightarrow \nabla^2(\hat{\bar{F}}) = \frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right)\right\}\hat{g}(z) + \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)\hat{g}''(z)$$

Sea $\frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)}{\partial u_2}\right)\right\} = \nabla_T^2 \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)$

$$\rightarrow \nabla^2(\hat{\bar{F}}) = \nabla_T^2 \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)\hat{g}(z) + \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)\hat{g}''(z) = -\omega^2 \mu \hat{\epsilon} \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)\hat{g}(z)$$

$\nabla_T^2 \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)$ y $\hat{\bar{f}}(u_1, u_2)$ son paralelos ya que

$$\nabla_T^2 \hat{\bar{f}}(u_1, u_2) = -\left(\frac{\hat{g}''(z)}{\hat{g}(z)} + \omega^2 \mu \hat{\epsilon}\right)\hat{\bar{f}}(u_1, u_2) \qquad 67$$

Además $\nabla_T^2 \hat{\bar{f}}(u_1, u_2)$ y $\hat{\bar{f}}(u_1, u_2)$ dependen sólo de u_1, u_2.

Por consiguiente,

$$\left(\frac{\hat{g}''(z)}{\hat{g}(z)}+\omega^2\mu\hat{\epsilon}\right)=\hat{k}_c^2=\text{ ctte.} \qquad 68$$

$$\rightarrow\nabla_T^2(\hat{\vec{f}})=-\hat{k}_c^2\hat{\vec{f}} \qquad 69$$

Se expresa

$$\frac{\hat{g}''(z)}{\hat{g}(z)}=\hat{\gamma}^2=\text{ ctte.} \qquad 70$$

$\rightarrow\hat{g}(z)$ es de la forma $\mathrm{e}^{\mp\hat{\gamma}z}$

$$\rightarrow\hat{k}_c^2=\hat{\gamma}^2+\omega^2\mu\hat{\epsilon}\rightarrow\hat{\gamma}^2=\hat{k}_c^2-\omega^2\mu\hat{\epsilon} \qquad 71$$

Conclusión

Las soluciones de $\nabla^2\hat{\vec{F}}(\boldsymbol{r})=-\omega^2\mu\hat{\epsilon}\hat{\vec{F}}(\boldsymbol{r})$ con $\hat{\vec{F}}(u_1,u_2,z)=\hat{\vec{f}}(u_1,u_2)\hat{g}(z)$ satisfacen

$\hat{\vec{F}}^{\pm}(u_1,u_2,z)=\hat{\vec{f}}^{\pm}(u_1,u_2)\mathrm{e}^{\mp\hat{\gamma}z}$ con

$\nabla_T^2(\hat{\vec{f}})=-\hat{k}_c^2\hat{\vec{f}}$ y $\hat{\gamma}^2=\hat{k}_c^2-\omega^2\mu\hat{\epsilon}$

El campo $\hat{\vec{f}}^{\pm}(u_1,u_2)$ es un vector (3 componentes) y está dado por

$$\hat{\vec{f}}^{\pm}(u_1,u_2)=\hat{f}_1^{\pm}(u_1,u_2)\mathbf{1}_{\boldsymbol{u1}}+\hat{f}_2^{\pm}(u_1,u_2)\mathbf{1}_{\boldsymbol{u2}}+\hat{f}_z^{\pm}(u_1,u_2)\mathbf{1}_z \qquad 72$$

En la ecuación (72) $\hat{f}_z^{\pm}(u_1,u_2)$ representa a $\hat{e}_z^{\pm}(u_1,u_2)$ o $\hat{h}_z^{\pm}(u_1,u_2)$.

Modos de propagación de la onda electromagnética.

Las siguientes posibilidades de $\hat{f}_z^{\pm}$ determinan los modos de propagación de las ondas electromagnéticas respecto al eje *z*. El eje *z* corresponde a la dirección de propagación de la energía.

Posibilidad	Modo de propagación con respecto al eje *z*.
$\hat{e}_z^{\pm}=0$, $\hat{h}_z^{\pm}\neq0$	Modo TE – o modo H (***E*** transversal a *z*)
$\hat{e}_z^{\pm}\neq0$, $\hat{h}_z^{\pm}=0$	Modo TM – o modo E (***H*** transversal a *z*)
$\hat{e}_z^{\pm}=0$, $\hat{h}_z^{\pm}=0$	Modo TEM – (***E***, ***H*** transversales a *z*)
$\hat{e}_z^{\pm}\neq0$, $\hat{h}_z^{\pm}\neq0$	Modo E-H o H-E (depende de cual componente axial predomina)

A ver el modo TEM.
Solución de la ecuación de Helmholtz para el modo TEM.

Se puede demostrar que en un sistema generalizado,

$$\nabla\times\hat{\bar{F}}=\nabla_T\times\hat{\bar{F}}+\mathbf{1}_z\times\frac{\partial\hat{\bar{F}}}{\partial z} \qquad 73$$

donde

$$\nabla_T\times\hat{\bar{F}}=\frac{1}{h_1 h_2}\begin{vmatrix}\mathbf{1}_{u1}h_1 & \mathbf{1}_{u2}h_2 & \mathbf{1}_z\\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & 0\\ \hat{F}_1 h_1 & \hat{F}_2 h_2 & \hat{F}_z\end{vmatrix} \qquad 74$$

y además para el modo TEM, en el cual

$$\hat{\bar{F}}^{\pm}(u_1,u_2,z)=\hat{\bar{F}}_T^{\pm}(u_1,u_2,z)=\hat{F}_1^{\pm}(u_1,u_2,z)\mathbf{1}_{u1}+\hat{F}_2^{\pm}(u_1,u_2,z)\mathbf{1}_{u2},$$

que

$$\begin{aligned}&\nabla_T\times\hat{\bar{F}}_T^{\pm}\ \text{tiene dirección } z\\ &\mathbf{1}_z\times\frac{\partial\hat{\bar{F}}_T^{\pm}}{\partial z}\ \text{tiene dirección transversal}\end{aligned} \qquad 75$$

Luego,

$$\nabla\times\hat{\bar{E}}^{\pm}=\nabla\times\hat{\bar{E}}_T^{\pm}=\left(\nabla_T\times\hat{\bar{E}}_T^{\pm}+\mathbf{1}_z\times\frac{\partial\hat{\bar{E}}_T^{\pm}}{\partial z}\right)=-j\omega\mu\hat{\bar{H}}_T^{\pm} \qquad 76$$

implica que

$$\nabla_T\times\hat{\bar{E}}_T^{\pm}=\mathbf{0} \qquad 77$$

y

$$\mathbf{1}_z\times\frac{\partial\hat{\bar{E}}_T^{\pm}}{\partial z}=-j\omega\mu\hat{\bar{H}}_T^{\pm} \qquad 78$$

Pero

$$\nabla_T\times\hat{\bar{E}}_T^{\pm}=\mathbf{0}\rightarrow\nabla_T\times\left(\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\right)\mathrm{e}^{\mp\hat{\gamma}z}=\left\{\nabla_T\times\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\right\}\mathrm{e}^{\mp\hat{\gamma}z}=\mathbf{0} \qquad 79$$

$$\nabla_T\times\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)=\mathbf{0}\rightarrow\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)=-\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2) \qquad 80$$

Se tiene

$$\nabla\cdot\hat{\bar{E}}^{\pm}=\nabla\cdot\hat{\bar{E}}_T^{\pm}=0 \quad \text{(medio libre de fuentes)} \qquad 81$$

Pero

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\hat{\bar{E}}_T^{\pm}&=\nabla\cdot\left(e^{\mp\hat{\gamma}z}\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\right)=-\nabla\left(e^{-\hat{\gamma}z}\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\right)\\&=-\left(e^{\mp\hat{\gamma}z}\nabla^2\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)+\nabla(e^{\mp\hat{\gamma}z})\cdot\nabla^2\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\right)\\&=-e^{\mp\hat{\gamma}z}\nabla^2\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)=0\\&\rightarrow\nabla^2\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)=0\end{aligned} \qquad 82$$

Además,

$$\mathbf{1}_z\times\frac{\partial\hat{\bar{E}}_T^{\pm}}{\partial z}=-j\omega\mu\hat{\bar{H}}_T^{\pm}$$

$$\hat{\bar{H}}_T^{\pm}=-\frac{1}{j\omega\mu}\left[\mathbf{1}_z\times\frac{\partial\hat{\bar{E}}_T^{\pm}}{\partial z}\right]=\frac{1}{j\omega\mu}\left[\mathbf{1}_z\times\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)e^{\mp\hat{\gamma}z}\right)\right]$$

$$\rightarrow\hat{\bar{H}}_0^{\pm}=\mathbf{1}_z\times\left[\pm\frac{\hat{\gamma}}{j\omega\mu}\left(\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)e^{\mp\hat{\gamma}z}\right)\right] \qquad 83$$

La impedancia intrínseca del medio, $\hat{\eta}$ está dada por

$$\hat{\eta}=\frac{j\omega\mu}{\hat{\gamma}} \qquad 84$$

En forma general,

$$\hat{\bar{H}}_T^{\pm}=\pm\mathbf{1}_z\times\frac{\hat{\bar{E}}_T^{\pm}}{\hat{\eta}}\rightarrow\hat{\bar{H}}_T^{\pm}=\pm\mathbf{1}_n\times\frac{\hat{\bar{E}}_T^{\pm}}{\hat{\eta}} \qquad 85$$

También

$$\nabla_T^2(\hat{\bar{f}})=-\hat{k}_c^2\hat{\bar{f}} \quad \text{y} \quad \hat{\gamma}^2=\hat{k}_c^2-\omega^2\mu\hat{\epsilon} \quad \text{(visto antes)}$$

Luego

$$\begin{aligned}\nabla_T^2\left(\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\right)&=-\hat{k}_c^2\hat{\bar{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\\-\nabla_T^2\left(\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\right)&=-\hat{k}_c^2\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\\-\nabla_T^2\left(\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\right)&=-\nabla\left(\nabla_T^2\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\right)=-\hat{k}_c^2\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)\end{aligned}$$

Ya que

$$\nabla^2\hat{\varphi}_e^{\pm}(u_1,u_2)=0 \qquad 82$$

$$\rightarrow \hat{k}_c^2 = 0 \quad 86$$

$$\begin{aligned} &\nabla\times(\nabla\times\hat{\vec{E}}_T^{\pm}) = \mathbf{0} = \nabla\left(\nabla\cdot\hat{\vec{E}}_T^{\pm}\right) - \nabla^2\hat{\vec{E}}_T^{\pm} \\ &\rightarrow \mathbf{0} = \nabla\left(\nabla\cdot\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}\right) - \nabla^2\left(\hat{\varphi}_e^{\pm}\right) \qquad \text{ya que} \quad \nabla_T\times\hat{\vec{E}}_T^{\pm} = \mathbf{0} \\ &\rightarrow -\nabla\left(\nabla\cdot\nabla\hat{\varphi}_e^{\pm}\right) = -\nabla^2\left(\hat{\varphi}_e^{\pm}\right) \end{aligned} \quad 77$$

y

$$\hat{\gamma}^2 = -\omega^2\mu\hat{\epsilon} \quad 87$$

Luego,

$$\hat{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}} \quad 88$$

$$\hat{\eta} = \frac{j\omega\mu}{\hat{\gamma}} = \frac{j\omega\mu}{j\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\hat{\epsilon}}} \quad 89$$

Para el espacio libre,

$$\hat{\eta}\rightarrow\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi\times10^{-7}\times36\pi\times10^9} = 120\pi\approx377\,\Omega \quad 90$$

Para el modo TEM,

$$\hat{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\hat{\epsilon}} = \alpha + j\beta \quad 91$$

α es el coeficiente de atenuación (Np m^{-1})
β es la constante de fase (rad m^{-1}).
Para medios sin pérdidas α = 0 y $\hat{\gamma} = j\beta$.
En forma resumida,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\mathbf{1}_{\boldsymbol{e}}\cos(\omega t - \beta\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = H_0\mathbf{1}_{\boldsymbol{h}}\cos(\omega t - \beta\mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r}) \\ &\frac{\hat{E}_0}{\hat{H}_0} = \hat{\eta} \;;\mathbf{1}_{\boldsymbol{e}}\times\mathbf{1}_{\boldsymbol{h}} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} \;;\mathbf{1}_{\boldsymbol{h}} = \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}\times\mathbf{1}_{\boldsymbol{e}} \end{aligned} \quad 92$$

Promedio del vector de Poynting para ondas TEM.$\boldsymbol{P}_{av}$

$$\begin{aligned} &<\boldsymbol{S}^{\pm}> = \boldsymbol{P}_{av} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\vec{E}}\times\hat{\vec{H}}^*\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\hat{\vec{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\mathrm{e}^{\mp\hat{\gamma}z}\times\left[\pm\mathbf{1}_z\times\tfrac{\hat{\vec{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)}{\hat{\eta}}\right]^*\right\} \\ &= \pm\mathbf{1}_z\left[\tfrac{1}{2}\left|\hat{\vec{e}}_T^{\pm}(u_1,u_2)\right|^2\mathrm{e}^{2\hat{\gamma}z}\mathrm{Re}\tfrac{1}{\hat{\eta}}\right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{P}_{av} = \pm \mathbf{1}_z \left[\frac{\left| \hat{e}_T^{\pm}(u_1, u_2) \right|^2}{2\eta} \right] \rightarrow \pm \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}} \left[\frac{\left| \hat{e}_T^{\pm}(u_1, u_2) \right|^2}{2\eta} \right] \quad \text{(medio sin pérdidas)} \qquad 93$$

El flujo de potencia está en la dirección $\pm \mathbf{1}_{\boldsymbol{n}}$.